

(53 ورقه)

السؤال الأول:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{0} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= +1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$= (-1) - 1(1) = -2 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad (2)$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad (2)$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (2)$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad (2)$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (2)$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad (2)$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad (2)$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad (2)$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad (2)$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}' = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = \bar{A}'B$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني: (20 نقطة)

نكتب المصفوفة $B = (-1)$ ونضيفه إلى باقي المصفوفات: (5)

$$(5) \begin{vmatrix} b & b & \dots & b & b & b+a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 & -a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & -a \\ a & 0 & \dots & 0 & 0 & -a \end{vmatrix}$$

5

تصنيف جميع الأعمدة إلى العمود الأخير:

5

$$\left(\begin{array}{cccc|c} b & b & \dots & b & b & nb+a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} a^{n-1} (nb+a)$$

25 درجة

السؤال الثالث:

1-

$$(1, 0, 0) \in W \quad (3)$$

$$(0, 1, 0) \in W \quad (3)$$

نثبت أنه:

$$(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin W \quad (3)$$

$$(1) \quad W \neq \mathbb{R}^3$$

2 - من الواضح أنه $0 \in \langle S \rangle$ لأن:

(2)

$$0 = 0s_1 + 0s_2 + \dots + 0s_n; s_i \in S$$

وإذا كان $x, y \in \langle S \rangle$ و $\alpha, \beta \in F$ طے ہے

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n ; \alpha_i \in F$$

$x_i \in S$

$$y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_t y_t ; \beta_j \in F$$

$y_j \in S$

$$\alpha x + \beta y = \alpha (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) + \beta (\beta_1 y_1 + \dots + \beta_t y_t)$$

$$= (\alpha \alpha_1) x_1 + (\alpha \alpha_2) x_2 + \dots + (\alpha \alpha_n) x_n$$

$$+ (\beta \beta_1) y_1 + \dots + (\beta \beta_t) y_t \in \langle S \rangle$$

حماستہ ہے کہ $\langle S \rangle$ قطار صحافی جزئیہ من V وهو

یوں کہ ثابت ہے:

$$\forall s \in S' \Rightarrow s = 1s \in \langle S \rangle \Rightarrow S' \subseteq \langle S \rangle$$

(2.5 دیکھو)

السؤال الرابع:

$$\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وابتکائی ہے :

(3)

$$W = \{ (1, 1, 0, -1), (0, 1, 1, 0) \}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

وابتکائی ہے :

(3)

$$W = \{ (1, 1, 0, -1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \}$$

-2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\Rightarrow U = W$$